الجبر الخطي — تذكير سريع

ملخص القوانين والأفكار الأساسية • إعداد لفيصل

١. المتجهات والضرب النقطي

نجمع المتجهات ونضربها بعدد ثابت عنصرًا بعنصر. الضرب النقطي يعطي عددًا:

$$v \cdot w = v_1w_1 + \cdots + v_nw_n$$

طول المتجه، ومتجه الوحدة في اتجاه متجه غير صفري:

$$\|v\| = \sqrt{(v_1^2 + \cdots + v_n^2)} \qquad u = v / \|v\|$$

الزاوية بين متجهين غير صفريين:

$$\cos\theta = (v \cdot w) / (\|v\| \, \|w\|)$$

الزاوية	الضرب النقطي
°حادة: أقل من ٩٠	موجب
°متعامدان: ٩٠	صفر
°منفرجة: أكبر من ٩٠	سالب

٢. عمليات الصفوف والشكل السلمي

العمليات المسموحة: تبديل صفين، وضرب صف بعدد غير صفري، وإضافة مضاعف صف إلى صف آخر.

الشكل السلمي: المحاور تتحرك لليمين كلما نزلنا، وتحت كل محور أصفار، والصفوف الصفرية في الأسفل.

الشكل السلمي: يحقق شروط الشكل السلمي، وكل محور يساوي ١، وهو العنصر غير الصفري الوحيد في عمودهR.

٣. كيف تحدد عدد الحلول؟

النتيجة	بعد اختزال المصفوفة الموسعة
لا يوجد حل	صف متناقض، مثل: صفر = ٥
حل وحيد	لا تناقض، ولا متغيرات حرة
حلول لا نهائية	لا تناقض، ويوجد متغير حر

> الصف الصفري وحده لا يكفي للحكم بأن الحلول لا نهائية؛ لازم تتأكد من وجود متغير حر.

المحاور والحلول والاستقلال

تكملة الملخص • أمثلة وقواعد للتذكّر

٤. المتغيرات الأساسية والحرة

.عمود المتغير الذي فيه محور يعطي متغيرًا أساسيًا، وعمود المتغير دون محور يعطي متغيرًا حرًا

> .عدد المتغيرات الحرة = عدد المتغيرات – عدد المحاور في مصفوفة المعاملات

:مثال .t نعطي المتغير الحر رمزًا مثل

$$x_1 + 2x_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = t, \quad x_1 = 3 - 2t$$

:وبالصيغة المتجهية، حيث المعامل عدد حقيقي

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

٥. التركيب الخطي والفضاء المولّد

.التركيب الخطي هو مجموع متجهات مضروبة بمعاملات. والفضاء المولّد هو كل المتجهات التي يمكن تكوينها بهذه الطريقة

$$x_1 v_1 + \cdots + x_p v_p = b \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b$$

.نضع المتجهات كأعمدة في مصفوفة المعاملات. وجود حل يعني أن متجه الطرف الأيمن ينتمي للفضاء المولّد

٦. النظام المتجانس والاستقلال الخطي

:النظام المتجانس دائمًا له الحل الصفري

$$Ax = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ is a solution}$$

أعمدة المصفوفة	حلول النظام المتجانس	المتغيرات الحرة
مستقلة خطيًا	الحل الصفري فقط	لا توجد
معتمدة خطيًا	توجد حلول غير صفرية	يوجد متغير حر

.المجموعة التي تحتوي المتجه الصفري معتمدة خطيًا. ومتجهان غير صفريين يكونان معتمدين إذا كان أحدهما مضاعفًا للآخر

أهم فرق تتذكره

:لمصفوفة لها عدد معيّن من الصفوف والأعمدة

المعنى	المحاور
.الأعمدة تولّد فضاءً بُعده عدد الصفوف، ويوجد حل لكل طرف أيمن	محور في كل صف
.الأعمدة مستقلة، والحل الوحيد للنظام المتجانس هو الصفري	محور في كل عمود